14/5/2018

▸ Δακτύλιοι και Σώματα

▸ **Ορισμός** Ένας δακτύλιος $(R,+,\cdot)$ είναι ένα σύνολο R μαζί με δύο διμελείς πράξεις $+$ και $\cdot$, τέτοιες ώστε:

(i) $(R,+)$ είναι αβελιανή ομάδα.

(ii) Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in R$, ισχύει: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

(iii) Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in R$, ισχύει:

$$\boxed{(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma+\beta\gamma}$$

και $\boxed{\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma}$

Παραδείγματα • $\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}$

• $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

• $\mathbb{Q}$: ρητοί • $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ • $\mathbb{R}^{n\times n}$

• Όλοι οι παραπάνω είναι δακτύλιοι, γιατί ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις!!

Ορισμός Αντιμεταθετικός δακτύλιος, λέγεται ένας δακτύλιος R, για τον οποίο ισχύει:

$$\boxed{\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha}\quad \text{, για κάθε } \alpha,\beta\in R$$

• Αντιμεταθετικοί : $\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

• Μη-αντιμεταθετικοί : $\mathbb{R}^{n\times n}$

Ορισμός Δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, λέγεται ένας δακτύλιος R, αν υπάρχει $e\in R$, τέτοιο, ώστε:

$$\boxed{e\cdot\alpha = \alpha\cdot e = \alpha}\quad \text{, για κάθε } \alpha\in R$$

Το e ονομάζεται μοναδιαίο στοιχείο του R

⚠ Ο δακτύλιος $2\mathbb{Z}$ **δεν** έχει μοναδιαίο στοιχείο:

Για $\alpha \in 2\mathbb{Z}$: $\alpha \cdot e = \alpha \Rightarrow \boxed{e = 1 \notin 2\mathbb{Z}}$

▶ Παράδειγμα $O = (\{0\}, +, \cdot)$ → είναι προφανώς δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, καθώς, για $0 \in O$ έχω: $\boxed{0} \cdot 0 = 0$

▶ Ορισμός Σε έναν δακτύλιο με μοναδιαίο στοιχείο, το $\alpha \in R$ λέγεται μονάδα, αν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο (δηλαδή, αν υπάρχει $\beta \in R$ τ/ω: $\alpha\beta = \beta\alpha = e$)

- ▶ Οι μονάδες του $\mathbb{Z}$: $\{1, -1\}$
- ▶ Οι μονάδες του $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}^*$
- ▶ Οι μονάδες του $\mathbb{R}, \mathbb{C}$: $\mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$
- ▶ Μονάδες του $\mathbb{Z}_4$: $U(\mathbb{Z}_4)$
- ▶ Μονάδες του $\mathbb{R}^{4\times 4}$: $GL(4, \mathbb{R})$

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$ (Αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο ενός δακτυλίου R, με μοναδιαίο στοιχείο, είναι μονάδα, τότε ο R λέγεται δακτύλιος διαίρεσης.

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$ (Ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης, καλείται σώμα και ένας μη-αντιμεταθετικός, καλείται στρεβλό σώμα.

⚠ Το σύνολο $(R=\{0,1\},+,\cdot) \cong \mathbb{Z}_2$, είναι δακτύλιος

- Είναι, προφανώς, και δακτύλιος διαίρεσης.
- Επίσης, είναι σώμα, αφού είναι αντιμεταθετικός

▶ Το $\mathbb{Z}$ δεν είναι δακτύλιος διαίρεσης

▶ Το $\mathbb{Q}$ είναι δακτύλιος διαίρεσης, είναι αντιμεταθετικός $\Big\}$ $\boxed{\mathbb{Q}: \text{σώμα}}$

▶ Αντίστοιχα, το $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ είναι σώματα

▶ Το $\mathbb{R}^{n\times n}$, για $n \geq 2$, δεν είναι καν δακτύλιος διαίρεσης, άρα δεν είναι ούτε σώμα ούτε στρεβλό σώμα

▶ Στρεβλό σώμα Hamilton

$$\mathbb{H}=\{\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k \mid \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\}$$

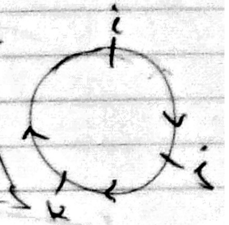
↳ Τετράδια ή τετράνια του Hamilton

• Ιδιότητες :

$i^2=j^2=k^2=1$

$\boxed{i\neq j\neq k}$

$ij=k$	$ji=-k$
$jk=i$	$kj=-i$
$ki=j$	$ik=-j$



• $(H,+)$: αβελιανή ομάδα. Άρα είναι μεταθετικός δακτύλιος. Έχει μοναδιαίο στοιχείο το 1.

• Είναι δακτύλιος διαίρεσης ;

• Γνωρίζουμε ότι στο $\mathbb{C}$: $(\alpha+bi)(\alpha-bi)=\alpha^2+b^2\neq 0$

$$\Rightarrow (\alpha+bi)\cdot\frac{(\alpha-bi)}{\alpha^2+b^2}=1 \Rightarrow \boxed{(\alpha+bi)^{-1}=\frac{\alpha-bi}{\alpha^2+b^2}}$$

• Ομοίως στο $\mathbb{H}$: Έστω $\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k\neq 0\in\mathbb{H}$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k)(\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k)=(\alpha^2-\cancel{\alpha\beta i}-\cancel{\alpha\gamma j}-\cancel{\alpha\delta k})$$

$$+(\cancel{\alpha\beta i}+\beta^2-\cancel{\beta\gamma k}+\cancel{\beta\delta j})+(\cancel{\alpha\gamma j}+\cancel{\beta\gamma k}+\gamma^2-\cancel{\gamma\delta i})$$

$$+(\cancel{\alpha\delta k}-\cancel{\beta\delta j}+\cancel{\gamma\delta i}+\delta^2)=\boxed{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}\neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k)^{-1}=\frac{\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}}$$

• Άρα, ο H είναι δακτύλιος διαιρέσεως, μη μεταθετικός. Συνεπώς $(H,+,\cdot)$ στρεβλό σώμα!!!

$\boxed{\text{▸ Πρόταση}}$ { Έστω R δακτύλιος. Τότε:

(i) $0\cdot\alpha = \alpha 0 = 0$

(ii) $\alpha(-b) = (-\alpha)\cdot b = -(\alpha\cdot b)$

(iii) $(-\alpha)\cdot(-b) = \alpha b$

⚠ Ομάδες τάξης ≤ 8.

$o(G)=1 \Rightarrow G \simeq \{e\}$

$o(G)=2 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_2$

$o(G)=3 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_3$

$o(G)=4 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_4$ ή $G \simeq \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 = V_4$

$o(G)=5 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_5$

$o(G)=6 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_6$ ή $G \simeq S_3 \equiv D_3$

$o(G)=7 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_7$

$o(G)=8 \Rightarrow$ (i) $G \simeq \mathbb{Z}_8$ (ii) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2 \simeq G$

(iii) $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \simeq G$, (iv) $G \simeq D_4$ (v) $G \simeq H_4$.

$H_4 = \left\{ \begin{matrix} 1, i, j, k, \\ -1, -i, -j, -k \end{matrix} \right\}$ → Κάθε στοιχείο έχει τάξη 1, 2 ή 4

▸ Απόδειξη (Πρότασης):

(i) $0 \cdot \alpha = (0+0)\alpha \Rightarrow \cancel{0 \cdot \alpha} + 0 = \cancel{0 \cdot \alpha} + 0 \cdot \alpha \Rightarrow \boxed{0 = 0 \cdot \alpha}$

Όμοια: $\boxed{0 = \alpha \cdot 0}$

(ii) Από το i: $\alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha(-b+b) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha(-b) + \alpha b = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha(-b) = -(\alpha \cdot b)}$

Όμοια: $\boxed{(-\alpha) \cdot b = -(\alpha \cdot b)}$

(iii) Έχω:

$(-\alpha) \cdot (-b) \overset{ii}{=\!=} -((-\alpha) \cdot b) = -(-(\alpha b)) = \alpha b$

$\Rightarrow \boxed{(-\alpha)(-b) = \alpha b}$

▸ Πρόταση Έστω R δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

Το μοναδιαίο στοιχείο είναι μοναδικό!

▸ Απόδειξη: Έστω e και e' μοναδιαία στοιχεία του R.

Τότε: $\begin{cases} e \cdot \alpha = \alpha \cdot e = \alpha, \forall \alpha \in R \\ e' \cdot \alpha = \alpha \cdot e' = \alpha, \forall \alpha \in R \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \text{Για } \alpha = e': \begin{cases} e \cdot e' = e' \\ e' \cdot e = e \end{cases} \\ \text{Για } \alpha = e: \end{cases} \Longrightarrow \boxed{e = e'}$

Άρα, το μοναδιαίο στοιχείο είναι μοναδικό!

▶ Ορισμός Έστω α, b δύο μη-μηδενικά στοιχεία του R. Αν $\alpha \cdot b = 0$, τότε τα α, b λέγονται διαιρέτες του 0. (Το α λέγεται αριστερός διαιρέτης του 0 και το β λέγεται δεξιός διαιρέτης του 0)

▶ Ορισμός Ακέραια περιοχή, λέγεται ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, που δεν έχει διαιρέτες του μηδενός

▶ Παράδειγμα $\mathbb{Z}_{12}$.

Διαιρέτες του μηδενός : $\{[2],[3],[8],[10],[6],[4],[9]\}$

Όχι διαιρέτες του μηδενός : $\{[0],[1],[5],[7],[11]\}$

▶ Πρόταση Στο δακτύλιο $\mathbb{Z}_n$, οποιοδήποτε μη-μηδενικό στοιχείο είναι διαιρέτης του μηδενός ή μονάδα

• Απόδειξη : Έστω $[\alpha]_n \neq [0]_n$ (δηλαδή $n \nmid \alpha$)

Έστω μ.κ.δ$(\alpha, n) = d$

(i) $\boxed{d=1}$. Συνέπεια $1 = \kappa\alpha + \lambda n \Rightarrow [\kappa]_n[\alpha]_n = [\kappa\alpha]_n = [1-\lambda n]_n$

$\Rightarrow [\kappa\alpha]_n = [1]_n \Rightarrow$

Άρα $[\alpha]_n$ αντιστρέψιμος $\Rightarrow \boxed{[\alpha]_n \text{ μονάδα}}$

(ii) $\boxed{d = \mu\kappa\delta(a,n) \neq 1}$ $\Rightarrow 1 < d < n$

• Έχω: $[a]_n \cdot [n/d]_n = [a \cdot \frac{n}{d}]_n = [\frac{a}{d} \cdot n]_n = [0]_n$
$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\neq 0 \;\;\;\;\;\;\;\; \neq 0$

$\Rightarrow [a]_n$: διαιρέτης του μηδενός